Inspectoratul Şcolar al Judeţului Arad

Olimpiada de Matematică
Etapa pe centru - 18.02.2012
Barem de notare
Clasa a X-a

1.

Avem: $a_k \in [2,3],\ k = \overline{1,n}, deci: (a_k - 2)(a_k - 3) \leq 0;\ k = \overline{1,n}$ *3p*

Deducem: $5a_k - 6 \geq a_k^2;\ \ k = \overline{1,n}$ *1p*

de unde rezultă

$\log_{a_1}(5a_2 - 6) + \log_{a_2}(5a_3 - 6) + \dots + \log_{a_n}(5a_1 - 6) \geq 2\left(\log_{a_1} a_2 + \dots + \log_{a_n} a_1\right)$ *2p*

dar, $\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1 \geq n\sqrt[n]{\log_{a_1} a_2 \log_{a_2} a_3 \dots \log_{a_n} a_1} = n,$

de unde concluzia este imediată *1p*

2.

Dacă $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_{2012}| = 1, atunci\ \frac{1}{z_k} = \overline{z_k};\ \ k = \overline{1,2012}$ *2p*

Avem: $\sum_{k=1}^{2012}|z - z_k| = \sum_{k=1}^{2012}|z_k|\left|\frac{z}{z_k} - 1\right| = \sum_{k=1}^{2012}|z\overline{z_k} - 1|,$ *2p*

dar, $\sum_{k=1}^{2012}|z\overline{z_k} - 1| \geq \left|\sum_{k=1}^{2012}(z\overline{z_k} - 1)\right| = 2012.$ *3p*

3.

Din inegalitatea mediilor, obţinem:

$\frac{1+2+\dots+n}{n} \geq \sqrt[n]{1 * 2 * \dots * n}, n \geq 1$ *3p*

de unde: $\frac{n(n+1)}{2n} \geq \sqrt[n]{n!}; n \geq 1$ *2p*

de unde rezultă: $\frac{n+1}{2} \geq \sqrt[n]{n!}$, *şi logaritmizând în baza n!, avem:*

$\log_{n!}\frac{n+1}{2} \geq \log_{n!}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}$ *2p*

4.

Se ştie că funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=x+1$ *este bijectivă* 2p

Folosim rezultatele:

Dacă $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *şi* $f\circ g$ *injectivă => g injectivă* 2p

Dacă $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *şi* $f\circ g$ *surjectivă => f surjectivă* 2p

şi cum f=g, concluzia este imediată 1p